|  |  |
| --- | --- |
| 结论九：多面体的外接球和内切球 | |
| 结  论 | **1.长方体的体对角线长d与共顶点的三条棱的长a,b,c之间的关系为d2=a2+b2+c2;若长方体外接球的半径为R,则有(2R)2=a2+b2+c2.**  **2.棱长为a的正四面体内切球半径r=a,外接球半径R=a.** |
| 解  读 | 通过选择最佳角度找出含有正棱锥特征元素的外接球的一个轴截面圆，于是该圆的半径就是所求的外接球的半径.从而把立体几何问题转化为平面几何问题来研究 |
| 典  例 | 蹴鞠（如图所示），又名蹴球、蹴圆、筑球、踢圆等，蹴有用脚蹴、踢的含义，鞠最早系外包皮革、内实米糠的球.因而蹴鞠就是指古人以脚蹴、塌、踢皮球的活动，类似今日的足球.年月日，蹴鞠已作为非物质文化遗产经国务院批准列入第一批国家非物质文化遗传名录.已知某蹴鞠的表面上有四个点、、、，满足为正三棱锥，是的中点，且，侧棱，则该蹴鞠的表面积为（ ）  figure  A． B． C． D． |
| 解  析 | 【答案】B  【详解】取中点，连接、，  figure  为中点，，，同理，，平面，  平面，，且，平面，、平面，，， 三棱锥是正三棱锥，、、三条侧棱两两互相垂直.将正三棱锥补成正方体，如下图所示：  figure  因为，所以正方体的体对角线长为，所以，正三棱锥的外接球的直径，所以，正三棱锥的外接球的表面积是， |
| 反  思 | 本题先推导出、、两两垂直，然后将正三棱锥补成正方体，计算出正方体的体对角线长，即为三棱锥的外接球直径，利用球体的表面积公式可得结果. 求空间多面体的外接球半径的常用方法：  ①补形法：侧面为直角三角形，或正四面体，或对棱二面角均相等的模型，可以还原到正方体或长方体中去求解；  ②利用球的性质：几何体中在不同面均对直角的棱必然是球大圆直径，也即球的直径；  ③定义法：到各个顶点距离均相等的点为外接球的球心，借助有特殊性底面的外接圆圆心，找其垂线，则球心一定在垂线上，再根据带其他顶点距离也是半径，列关系求解即可. |
| 针对训练\*举一反三 | |
| 1．已知三棱锥外接球的球心在线段上，若与均为面积是的等边三角形，则三棱锥外接球的体积为（ ）  A． B． C． D．  【答案】D  【详解】由题意知，（为三棱锥外接球半径)，与均为面积是的等边三角形，设边长为，则有，所以，  ,是等腰三角形，又为的中点，,  ,  .  figure  2．已知圆锥的顶点和底面圆周都在球面上，圆锥的侧面展开图的圆心角为，面积为，则球的表面积等于（ ）  A． B． C． D．  【答案】A  【详解】设圆锥母线为，底面半径为，则，解得，如图，是圆锥轴截面，外接圆是球的大圆，设球半径为，，，  ，，所以球表面积为．  figure  3．为了给数学家帕西奥利的《神奇的比例》画插图，列奥纳多·达·芬奇给他绘制了一些多面体，如图的多面体就是其中之一.它是由一个正方体沿着各棱的中点截去八个三棱锥后剩下的部分，这个多面体的各棱长均为2，则该多面体外接球的体积等于（ ）  figure  A． B． C． D．  【答案】D  【详解】  figure  如图，把该多面体补形为正方体，由所给多面体的棱长为2，得正方体的棱长为，正方体的中心即为多面体的外接球球心，球心到多面体顶点的距离为，即所求外接球的半径，其体积.  4．已知各顶点都在同一球面上的正四棱柱的底面边长为，高为，球的体积为，则这个正四棱柱的侧面积的最大值为（ ）  A． B． C． D．  【答案】B  【详解】设球的半径为，则，解得.如图， 正四棱柱底面对角线，在中，由，，，则侧面积，即侧面积的最大值为.  figure  5．长方体各顶点都在球面上，，两点球面距离，、两点球面距离，则值（ ）  A． B． C． D．2  【答案】C  【解析】如图所示：  figure  设，则，球的直径，即，则是等边三角形，在中，，，  故.  6．已知球与棱长为的正方体的各面都相切，则平面截球所得的截面圆与球心所构成的圆锥的体积为 （ ）  A． B． C． D．  【答案】C  【解析】因为球与棱长为的正方体的各面都相切，所以球O为正方体的内切球，则球O的半径 ，球心O到A的距离为  底面为等边三角形，所以球心O到平面的距离为 ，所以平面截球所得的截面圆的半径为 ，所以圆锥的体积为 ，所以选C  7．在四棱锥中，四边形是边长为2的正方形，是正三角形，且侧面底面.若点，，，，都在同一个球面上，则该球的表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_.  【答案】  【详解】由题意，可将该四棱锥补形为正三棱柱，则该四棱锥的外接球即为正三棱柱的外接球，记球心为，  figure  分别取、的中点为、；分别记与的外接圆圆心为、，连接，，，因为与都是正三角形，所以，且，根据球的性质，以及正棱柱的结构特征可得，球心必在上，且为的中点，连接，  则外接球的半径为，因此，外接球的表面积为.  8．已知正三棱锥内接于半径为2的球，且扇形的面积为，则正三棱锥的体积为\_\_\_\_\_\_．  【答案】  【详解】设底面的中心为，平面如图所示，由扇形的面积为，，所以，所以，所以，，所以正三棱锥的高为，  底面的面积为，因此体积为．  figure  9．已知边长为1的正的三点都在球的球面上，的延长线与球面的交点为，若三棱锥的体积为，则球的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.  【答案】  【详解】作平面交的延长线与，设，设球心为，球的半径，过三点的小圆的圆心为，则平面，所以，由平面，得平面，  且，又，所以，由正弦定理得，  ，∴三棱锥高，∵是边长为1的正三角形，三棱锥的体积为，∴，∴，  ∴，∴，则球的体积为，  figure  10．棱长为的正方体内有一个内切球O，过正方体中两条互为异面直线的，的中点作直线，该直线被球面截在球内的线段的长为\_\_\_\_\_\_\_.  【答案】  【解析】以为坐标原点建立空间直角坐标系,所以球心,,,,故到直线的距离为,而球的半径为,所以在球内的线段长度为.  figure | |

